PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO - 2008

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

La prueba consta de cuatro bloques con dos opciones cada uno. Debes contestar una única opción de cada bloque. Todas las opciones puntúan igual. Puedes usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

1º-A) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$ b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$

----

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - 1} = \frac{7}{-1} = \underline{\underline{-7}}$$

b)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = (1+0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indter. \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{2x}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{\cos x}{\frac{2x}{\pi}} \right) \right]^{\frac{1}{\cos x}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{\frac{1}{\cos x}} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x}{\pi \cos x}} \right)^{\frac{1}{\cos x}} = A \cdot B \qquad (*)$$

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=1^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\;\Rightarrow\; Indter.\;\Rightarrow\;\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=e^{\lambda}\;\Rightarrow\;\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos x}\cdot L\left(\frac{2x}{\pi}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{0}\cdot L1=\frac{1}{0}\cdot 0=\frac{0}{0}\;\Rightarrow\; In\det.\;\Rightarrow\;\{L'Hopital\}\;\Rightarrow\;\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{x}}{-sen\ x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x\,sen\ x}=$$

$$=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}\cdot sen\ \frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi\cdot 1}=\underline{-\frac{2}{\pi}=A}$$

$$B=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{\pi\cos x}}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{\pi\cos x}}\right)^{\frac{2x}{\pi\cos x}\cdot\frac{\pi\cos x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos x}}=$$

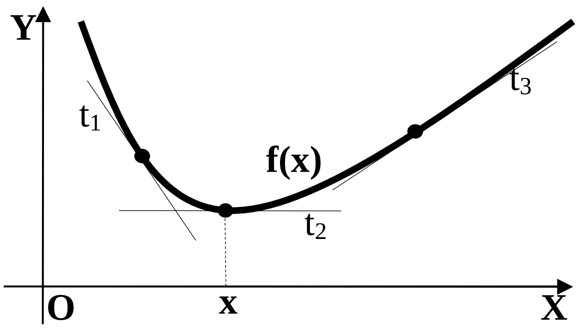
$$=\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{\pi\cos x}}\right)^{\frac{2x}{\pi\cos x}}\right]^{\frac{\pi}{2x}}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2x}}=e^{\frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{2}}}=e^{1}=\underline{e}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}=-\frac{2}{\pi}\cdot e=\underline{\underline{-\frac{2e}{\pi}}}$$

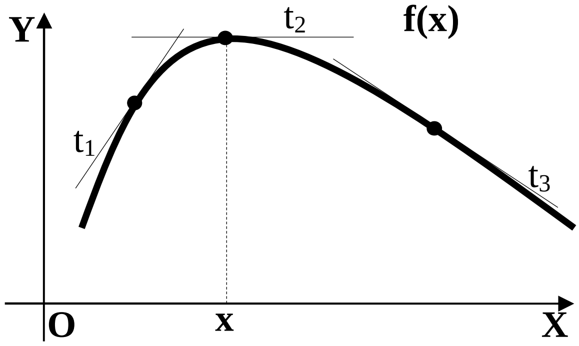
****

1º-B) Definición de punto de inflexión de una función. Calcula el valor de los parámetros $a,\ b\in R$ para que la función $f(x)=(x^2-a)e^x+bx$ tenga un punto de inflexión para $x=0$ y un mínimo relativo en x = 1.

Una función f(x), continua y derivable en el entorno de un punto de abscisa x = a, es convexa $(\cup)$ cuando al aumentar el valor de x aumenta el valor de las pendientes de las rectas tangentes. Por el contrario, en el entorno de un punto la función es cóncava $(\cap)$ cuando al aumentar los valores de x disminuye el valor de las pendientes de las rectas tangentes.



Convexa

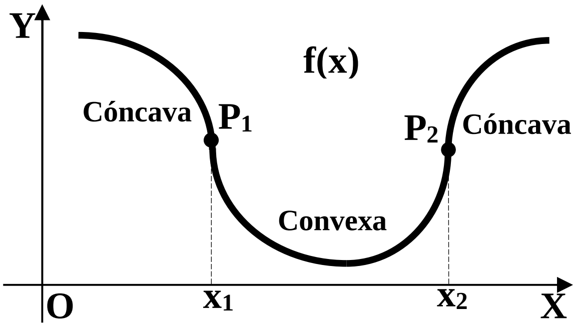


Cóncava

En la figura de la izquierda se observa que, en el entorno de x, las tangentes van aumentando, $t_1>t_2>t_3$; como la tangente o pendiente es la derivada de la función, en el entorno de x las derivadas constituyen una función creciente, por lo cual su derivada, o sea, la derivada de la derivada, (f'') es positiva.

En la figura de la derecha se observa que, en el entorno de x, las tangentes van disminuyendo, $t_1<t_2<t_3$; como la tangente o pendiente es la derivada de la función, en el entorno de x las derivadas constituyen una función decreciente, por lo cual su derivada, o sea, la derivada de la derivada, (f'') es negativa.

En resumen: si una función dos veces derivable en un punto x = a, es convexa $(\cup)$ en ese punto cuando f’’(a) > 0 y es cóncava $(\cap)$ en ese punto cuando f’’(a) < 0.



Un punto de inflexión es aquél donde la función pasa de ser cóncava a convexa o viceversa, o sea: la segunda derivada cambia de signo en ese punto, o lo que es lo mismo: se anula.

De lo anterior se deduce que para que una función tenga un punto de inflexión para x = a es condición necesaria que f’’(a) = 0.

La condición anterior, que es necesaria, no es suficiente; en algunos casos sucede que para x = a se anulen las derivadas segunda, tercera y así sucesivamente. En estos casos se debe seguir derivando la función hasta hallar una derivada que no se anule en ese punto. Si el orden de esa derivada es par y además f'(a) = 0, la función tiene un extremo relativo; si es impar, la función tiene un punto de inflexión para x = a.

Para que la función $f(x)=(x^2-a)e^x+bx$ tenga un mínimo relativo para x = 1 es necesario que se anule su primera derivada para ese valor:

$$f'(x)=2x\cdot e^x+(x^2-a)\cdot e^x+b=\underline{(x^2+2x-a)\cdot e^x+b=f'(x)}$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow (1^2+2\cdot 1-a)\cdot e^1+b=0\ ;;\ \underline{(3-a)e+b=0} \qquad (1)$$

Para que la función $f(x)=(x^2-a)e^x+bx$ tenga un punto de inflexión para x = 0 es necesario que se anule su segunda derivada para ese valor:

$$f''(x)=(2x+2)\cdot e^x+(x^2+2x-a)\cdot e^x=\underline{(x^2+4x+2-a)\cdot e^x=f''(x)}$$

$$f''(0)=0 \Rightarrow (0^2+4\cdot 0+2-a)\cdot e^0=0\ ;;\ (2-a)\cdot 1=0\ ;;\ 2-a=0\ ;;\ \underline{\underline{a=2}}$$

Sustituyendo el valor obtenido de a en la expresión (1):

$$(3-a)e+b=0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow (3-2)e+b=0\ ;;\ e+b=0\ ;;\ \underline{\underline{b=-e}}$$

****

SEGUNDO BLOQUE

2º-A) Calcula la siguiente integral $I = \int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} \cdot dx$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -9x^2 & +9x & +6 & x^2 - 5x + 6 \\ \hline -2x^3 & +10x^2 & -12x & & 2x+1 \\ \hline 0 & +x^2 & -3x & +6 & \\ & -x^2 & +5x & -6 & \\ \hline & 0 & +2x & 0 & \end{array}$$

$$I = \int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \left(2x + 1 + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} \right) dx = \int (2x+1) dx + \int \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} dx =$$

$$= \underline{x^2 + x + I_1 = I} \qquad (1)$$

$$I_1 = \int \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 - 5x + 6 = 0 \;;;\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = 2} \;;;\; \underline{x_2 = 3} \\ x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \int \frac{5}{(x-2)(x-3)} \cdot dx \Rightarrow \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax - 3A + Bx - 2B}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(A+B)x + (-3A - 2B)}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} A + B = 2 \\ -3A - 2B = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 2A + 2B = 4 \\ -3A - 2B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A = -4} \;;;\; \underline{B = 6} \Rightarrow I_2 = \int \left(\frac{-4}{x-2} + \frac{6}{x-3} \right) \cdot dx =$$

$$= \underline{-4L|x-2| + 6L|x-3| = I_1}.$$

Sustituyendo el valor de I_1 en (1):

$$\underline{\underline{I = x^2 + x - 4L|x-2| + 6L|x-3| + C}}$$

****

2º-B) Calcula la integral definida: $I=\int_0^{\pi} e^x \cdot sen\ x \cdot dx$.

Resolvemos en primer lugar la integral indefinida:

$$I=\int e^x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u=e^x \to du=e^x \cdot dx \\ sen\ x \cdot dx=dv \to v=-\cos x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=-e^x \cdot \cos x-\int -\cos x \cdot e^x \cdot dx=-e^x \cdot \cos x+\int e^x \cdot \cos x \cdot dx=\underline{-e^x \cdot \cos x+I_1=I} \qquad (*)$$

$$I_1=\int e^x \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u=e^x \to du=e^x \cdot dx \\ \cos x \cdot dx=dv \to v=sen\ x \end{array} \right\} \Rightarrow e^x \cdot sen\ x-\int sen\ x \cdot e^x \cdot dx=$$

$=\underline{e^x \cdot sen\ x-I=I_1}$. Sustituyendo este valor en (*), queda:

$$I=-e^x \cdot \cos x+e^x \cdot sen\ x-I\ ;;\ 2I=-e^x \cdot \cos x+e^x \cdot sen\ x \Rightarrow \underline{I=\frac{e^x}{2}(sen\ x-\cos x)+C}.$$

Resolvemos ahora la integral definida:

$$I=\int_0^{\pi} e^x \cdot sen\ x \cdot dx=\left[\frac{e^x}{2}(sen\ x-\cos x)\right]_0^{\pi}=\left[\frac{e^{\pi}}{2}(sen\ \pi-\cos \pi)\right]-\left[\frac{e^0}{2}(sen\ 0-\cos 0)\right]=$$

$$=\frac{e^{\pi}}{2}(0+1)-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{e^{\pi}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{e^{\pi}+1}{2}.$$

$$\underline{\underline{I=\int_0^{\pi} e^x \cdot sen\ x \cdot dx=\frac{e^{\pi}+1}{2}}}$$

****

TERCER BLOQUE

3º-A) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Encuentra la expresión general de la potencia n-ésima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.

b) Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n\in N,\ n\geq 1$, y calcula dicha matriz inversa.

----

a)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\ 1+1+0 & 0+1+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A^2}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\ 2+1+0 & 0+1+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A^3}$$

En general: $\underline{\underline{A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ n & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}}$

b)

Para que una matriz tenga inversa (sea inversible) es condición necesaria que el determinante de su matriz sea distinto de cero.

$$|A^n|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ n & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\ \Rightarrow\ A^n\ \underline{\underline{\textit{es inversible}\ \forall n\in N\ \textit{siendo}\ n\geq 1}}$$

Para determinar la inversa de A^n vamos a utilizar el Método de Gauss-Jordan:

$$\left(A^n/I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ n & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2+nF_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -n & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{\left(A^n\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -n & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}}$$

****

3º-B) Encuentra, si es posible, el valor del parámetro $a \in R$ de modo que el sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + z = a \end{cases}$:

a) Sea compatible determinado.

b) Sea compatible indeterminado.

c) Sea incompatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

$$Rango \;\; M \;\; \Rightarrow \;\; |M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M = 2}$$

a)

Para que el sistema sea compatible determinado, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser iguales e igual al número de incógnitas; en el caso que nos ocupa es imposible, por tener tres incógnitas y ser el rango de la matriz de coeficientes dos.

<u>El sistema no puede ser compatible determinado, independientemente del valor de n.</u>

b)

El sistema será compatible indeterminado cuando el rango de la matriz ampliada sea dos, (el mismo que la matriz de coeficientes y menor que el número de incógnitas).

$$Rango \;\; M' = 2 \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix} \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = -a + 4 + 2 - a = 6 - 2a = 0 \;\Rightarrow\; \underline{a = 3} \\ \{C_1, \; C_3, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a + 1 - 4 - 4 - 2 + a = 3a - 9 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{a = 3} \\ \{C_2, \; C_3, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 1 - 2 - a = a - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{a = 3} \end{Bmatrix}$$

<u>El sistema es compatible indeterminado para a = 3.</u>

c)

Para cualquier valor de a distinto de 3 el rango de M’ es tres, por lo tanto:

<u>El sistema es incompatible para cualquier valor de a distinto de tres.</u>

****

CUARTO BLOQUE

4º-A) Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(a,\ b,\ 1)$, $\overrightarrow{v}=(-3,\ 4,\ 1)$ y $\overrightarrow{w}=(1,\ 2,\ c)$, determina el valor de los parámetros $a,\ b,\ c\in R$ de manera que los vectores $\overrightarrow{v}\ \ y\ \ \overrightarrow{w}$ sean perpendiculares y además $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}$, donde $\wedge$ denota el producto vectorial. ¿Qué ángulo forman los vectores $\overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{v}$ en dicho caso?

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=(-3,\ 4,\ 1)\cdot(1,\ 2,\ c)=-3+8+c=5+c=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{c=-5}}$$

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}\ \Rightarrow\ (a,\ b,\ 1)\wedge(1,\ 2,\ -5)=(-3,\ 4,\ 1)\ ;;\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}=(-3,\ 4,\ 1)\ ;;$$

$$-5bi+2ak+j-bk-2i+5aj=(-3,\ 4,\ 1)\ ;;\ (-5b-2)i+(5a+1)j+(2a-b)k=(-3,\ 4,\ 1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{cases} -5b-2=-3 \\ 5a+1=4 \\ 2a-b=1 \end{cases}\right\}\ \Rightarrow\ -5b=-1\ ;;\ \underline{\underline{b=\frac{1}{5}}}\ ;;\ 5a=3\ ;;\ \underline{\underline{a=\frac{3}{5}}}$$

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar: $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\left|\overrightarrow{c}\right|\cdot\cos\alpha\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}}{\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\left|\overrightarrow{c}\right|}$.

Aplicando la fórmula a los vectores $\overrightarrow{u}=\left(\frac{3}{5},\ \frac{1}{5},\ 1\right)$, $\overrightarrow{v}=(-3,\ 4,\ 1)$:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left(\frac{3}{5},\ \frac{1}{5},\ 1\right)\cdot(-3,\ 4,\ 1)}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2+1^2}}=\frac{-\frac{9}{5}+\frac{4}{5}+1}{\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{1}{25}+1}\cdot\sqrt{9+16+1}}=$$

$$=\frac{-\frac{5}{5}+1}{\sqrt{\frac{35}{25}}\cdot\sqrt{26}}=\frac{0}{\frac{\sqrt{35\cdot 26}}{5}}=0\ \Rightarrow\ \underline{\alpha=90^{\circ}}$$

$$\underline{\underline{Los\ \ vectores\ \ \overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{v}\ \ son\ \ perpendiculares}}$$

****

4º-B) Dados los puntos $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(1+\lambda,\ 2,\ 1-\lambda)$ y $C(1+\lambda,\ 1+\lambda,\ 2+\lambda)$, donde $\lambda \in R$:

a) Prueba que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90º, independientemente del valor de λ.

b) Determina los valores de λ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices A, B y C sea igual a 3.

----

a)

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1+\lambda,\ 2,\ 1-\lambda) - (1,\ 1,\ 1) = \underline{(\lambda,\ 1,\ -\lambda) = \overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1+\lambda,\ 1+\lambda,\ 2+\lambda) - (1,\ 1,\ 1) = \underline{(\lambda,\ \lambda,\ 1+\lambda) = \overrightarrow{AC}}$$

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\lambda,\ 1,\ -\lambda) \cdot (\lambda,\ \lambda,\ 1+\lambda) = \lambda^2 + \lambda - \lambda - \lambda^2 = 0.$$

En efecto, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman 90º $\forall \lambda \in R$, como teníamos que probar

b)

Los catetos del triángulo ABC son los lados AB y AC, que son perpendiculares, como se ha probado en el apartado anterior, por lo cual, la hipotenusa es BC.

Aplicando la distancia entre dos puntos obtenemos los valores de λ:

$$\overline{BC} = 3 \Rightarrow \sqrt{[(1+\lambda)-(1+\lambda)]^2 + [(1+\lambda)-2]^2 + [(2+\lambda)-(1-\lambda)]^2} = 3 \ ;;$$

$$\sqrt{0^2 + (\lambda-1)^2 + (2\lambda+1)^2} = 3 \ ;; \ (\lambda-1)^2 + (2\lambda+1)^2 = 9 \ ;; \ \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 9 \ ;;$$

$$5\lambda^2 + 2\lambda - 7 = 0 \ ;; \ \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4+140}}{10} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{10} = \frac{-2 \pm 12}{10} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 1}} \ ;; \ \underline{\underline{\lambda_2 = -\frac{7}{5}}}$$

****